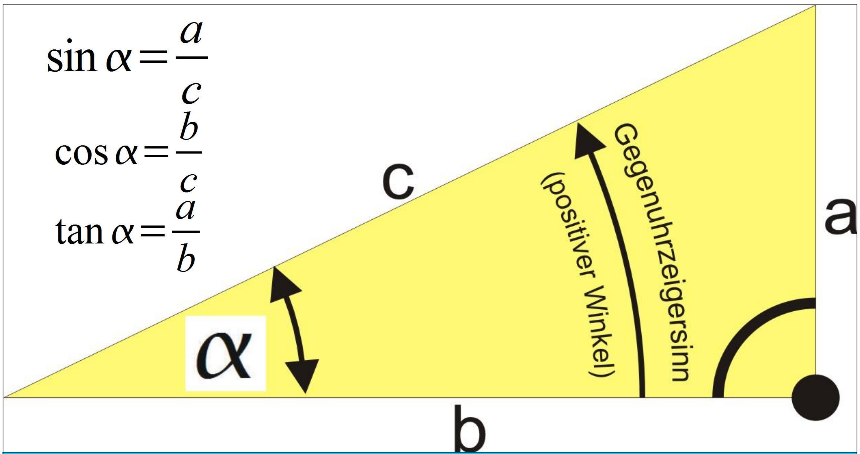
Winkelfunktionen ohne Mühe verstehen

TRIGONOMETRISCHE FUNKTIONEN – Winkelfunktionen sind nur auf den ersten Blick ein abschreckendes Stück Mathematik. Das Geheimis zum Verständnis liegt in der Art und Weise, wie man sie erklärt bekommt.



Winkelfunktionen sind mit einem einfach gezeichneten Dreieck leichter zu verstehen

Sinus, Cosinus und Tangens nötigen alleine durch ihre Namen jedem Schüler eine gehörige Portion Respekt ab. Völlig zu unrecht werde sie als unüberwindliche Hindernisse auf dem Weg zum Verständnis einer wunderbaren Mathematik angesehen. Das Geheimnis zu ihrer Beherrschung liegt vielmehr darin, sich nicht von der oft umständlichen Erklärung aus so manchem Pädagogenmund irre machen zu lassen. In dieser kleinen Abhandlung zu den Winkelfunktionen wird sich keine Zeile finden, wo von "Ankathete" oder "Hypotenuse" die Rede ist, da dies nur unnötiger Ballast auf dem Weg zum sicheren Umgang mit den Winkelfunktionen ist. Hier wird lediglich von den Buchstaben a,b und c die Rede sein. Darüber hinaus genügt es, sich drei Merksätze einzuprägen.

Drei wichtige Merksätze

•Positive Winkel verlaufen im Gegenuhrzeigersinn.
•Mit Sin, Cos, Tan sind alle unbekannten Werte im rechtwinkligen Dreieck errechenbar. Cot ist nicht nötig.
•Stets müssen zwei Werte bekannt sein, um den dritten Wert zu berechnen.

Mit Sin, Cos, Tan zum Ziel

Während man mit der Pythagoras-Funktion lediglich die Längen am rechtwinkligen Dreieck, aber keine Winkel berechnen kann, ist man mit den Trigonometrischen Funktionen Sinus, Cosinus und Tangens in der Lage, fehlende Winkel und natürlich die fehlenden Längen zu berechnen. Man muss sich allerdings im Formelumstellen ein wenig auskennen. Die Kunst besteht darin, das Gesuchte auf die linke Seite zu bekommen. Zunächst aber sucht man aus den drei Formeln diejenige aus, mit der man die gestellte Aufgabe lösen kann. Dazu ist es nur nötig, dass man sich überlegt, in welcher der drei Grundformeln zwei Werte bekannt sind und auch der gesuchte Wert vorkommt.

Wenn beispielsweise die Werte von a und b gegeben sind (siehe Grafik oben) und es soll der Winkel Alpha berechnet werden, dann kommt nur die Tangens-Funktion in Frage, da hier die beiden gegebenen Werte vorkommen. Wenn hingegen die Werte a und c gegeben sind, dann kann der Winkel Alpha nur mit der Sinus-Funktion berechnet werden. Die Sinus-Funktion wird ebenso verwendet,

Tipp

Wer sich sehr schwer tut, die Winkelfunktionen zu verstehen, der sollte es so machen wie viele Autofahrer. Denn zum Autofahren ist es auch nicht nötig, die Funktion eines Verbrennungsmotors zu verstehen. Es genügt, wenn man weiß, wie man schaltet, bremst und die Funktionen der vielen Hebel und Schalter kennt. Jedenfalls ist kein Ingenieursstudium Voraussetzung, um ein Auto zu beherrschen. Mit Formeln sollte ähnlich vorgegangen werden: Diese einfach als Werkzeuge nutzen, selbst wenn man sie noch nicht versteht.

Lösung mit...	Originalformel	Umgestellte Formel	Gegeben	Gesucht	a	b	c	Winkel
Pythagoras	$a^2+b^2=c^2$	$c=\sqrt{a^2+b^2}$	a,b	c	30	50	58,31	
Pythagoras	$a^2+b^2=c^2$	$b=\sqrt{c^2-a^2}$	a,c	b	30	26,4575	40	
Pythagoras	$a^2+b^2=c^2$	$a=\sqrt{c^2-b^2}$	b,c	a	30,001	50	58,31	
Winkelfunktion	$\sin\alpha=\frac{a}{c}$	$\alpha=\arcsin\frac{a}{c}$	a,c	Winkel	20		50	23,57817848
Winkelfunktion	$\cos\alpha=\frac{b}{c}$	$\alpha=\arccos(\frac{b}{c})$	b,c	Winkel		45	60	41,40962211
Winkelfunktion	$\tan\alpha=\frac{a}{b}$	$\alpha=\arctan(\frac{a}{b})$	a,b	Winkel	20	30		33,69006753
Winkelfunktion	$\sin\alpha=\frac{a}{c}$	$c=\frac{a}{(\sin\alpha)}$	Winkel, a	c	20		36,06	33,69
Winkelfunktion	$\tan\alpha=\frac{a}{b}$	$a=\tan\alpha*b$	Winkel, b	a	20	30		33,69
Winkelfunktion	$\cos\alpha=\frac{b}{c}$	$b=\cos\alpha*c$	Winkel, c	b		29,9996	36,06	33,69
Winkelfunktion	$\tan\alpha=\frac{a}{b}$	$b=\frac{a}{(\tan\alpha)}$	Winkel, a	b	10	17,3205		30
Winkelfunktion	$\cos\alpha=\frac{b}{c}$	$c=\frac{b}{(\cos\alpha)}$	Winkel, b	c		30	36,06	33,69
Winkelfunktion	$\sin\alpha=\frac{a}{c}$	$a=\sin\alpha*c$	Winkel, c	a	20		36,06	33,69

Wer mit dem Formelumstellen noch Probleme hat, bediene sich dieser Tabelle. Hier sind alle Formeln bereits passend umgestellt. Ergebnisfelder sind mit kräftigem Gelb hinterlegt. Grüne Felder sind Eingabefelder.

wenn der Winkel Alpha und die Strecke c gegeben sind und die Länge a berechnet werden soll. Dies war bereits das ganze Geheimnis der Winkelfunktionen!

Entscheidend ist, dass man sich die Grundformel und die Merksätze einprägt und das Formelumstellen übt. Aber auch wer mit dem Umstellen von Formeln seine Schwierigkeiten hat, soll nicht verzweifeln. In der obigen Tabelle sind alle Formeln passend zur gesuchten Lösung bereits umgestellt und mit Musterlösungen garniert. Damit hat man dann die Möglichkeit, die Berechnung mit dem Taschenrechner zu üben, da die Musterlösung schon zur Kontrolle gegeben ist. In der Tabelle sind Eingabefelder (bekannte Werte) grün und Ergebnisfelder (gesuchte Werte) in kräftigem Gelb gekennzeichnet.

Wie die vorherigen Beispiele zeigten, ist es einfach, die trigonometrischen Funktionen anzuwenden. Es ist aber unbedingt notwendig, damit zu

Tipp

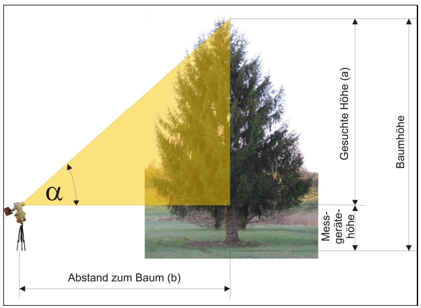
Es muss stets eine Formel gewählt werden, die zwei bekannte Werte und lediglich einen unbekannten Wert besitzt.

$\sin\alpha=\frac{a}{c}$ $\sin\alpha=\frac{a}{c}$ $\tan\alpha=\frac{a}{b}$

Bedeutung von Gelb und Grün:

= gesuchter Wert

= bekannter Wert



üben, um mehr Sicherheit in deren Anwendung zu bekommen. Daher ist es am Besten, sich einmal konkrete Aufgaben näher ansehen, die mit den Winkelfunktionen lösbar sind.

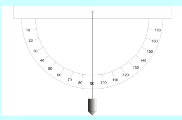
Wie hoch ist ein Baum?

Es ist für das Lernen besonders förderlich, wenn man Beispiele übt, die man selbst gut nachvollziehen kann. Daher werden mit den trigonometrische Funktion zunächst die Höhe von Bäumen berechnet. Es genügt, lediglich den Winkel bis zur Baumkrone, sowie den Abstand des Messgerätes vom Baum zu ermitteln. Für die Ermittlung des Winkels muss nicht auf einen teuren Theodoliden zurückgegriffen werden. Ein einfacher, selbst gebastelter Winkelmesser mit einem kleinen Lot an einer Schnur, die in der Mitte des Winkelmessers befestigt ist, würde ähnlich gute Ergebnisse liefern. Es sind aber auch Kompasse verwendbar, wenn diese einen eingebauten Höhenwinkelmesser besitzen.

Um die korrekte Höhe des Baumes zu ermitteln muss zum berechneten Ergebnis lediglich noch die Höhe des Messgerätes vom Boden ermittelt werden. Diese Höhe ist dem Ergebnis der Berechnung zuzuschlagen, was zur Gesamthöhe des Baumes führt.

Tipp

Völlig ausreichend für einfache Winkelmessungen sind Schulwinkel oder Kompasse.




Baumhöhenberechnung		
Gegeben:		
Abstand (b)	10	Meter
Winkel	42	Grad
Messger.-H.	2	Meter
Gesucht:		
Höhe (a)	9,00	Meter
Baumhöhe:	11,00	Meter
Formel	Umgestellt	
$\tan\alpha=\frac{a}{b}$	$a=\tan\alpha*b$	

Trigonometrische Funktionen ermöglichen die Größenberechnung hoher Bäume.

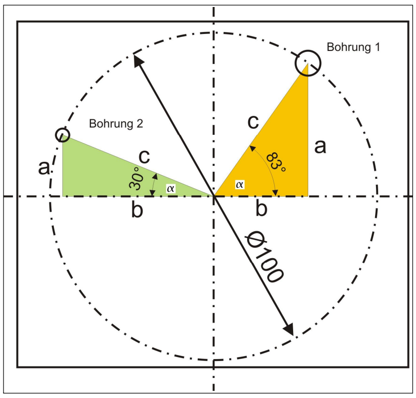
Bohrungskoordinaten berechnen		
Gegeben:		
Radius (c)	50	Millimeter
Winkel	30	Grad
Gesucht:		
Wert a:	25	Millimeter
Wert b:	43,30	Millimeter
Formel:	Umgestellt:	
$\sin\alpha=\frac{a}{c}$	$a=\sin\alpha*c$	
$\cos\alpha=\frac{b}{c}$	$b=\cos\alpha*c$	

Bohrungskoordinaten sind mit Sinus & Co. rasch berechnet.

Die Kunst, Abstände zu berechnen

Trigonometrische Berechnungen werden gerade in Handwerk und Industrie häufig angewendet. Es kommt nicht selten vor, dass die Koordinaten von Bohrungsabstände mit den Winkelfunktionen bestimmt werden müssen, da häufig die Bohrungen lediglich mit einem Radius und mit einem Winkel bemaßt sind.

In der folgenden Aufgabe ist der Winkel und der Abstand von der Scheibenmitte zur Bohrungsmitte gegeben. Für die Berechnung der Koordinaten sind lediglich die Sinus- und die Cosinus-Funktion nötig. Um die Werte a und b berechnen zu können, muss die jeweilige Formel jedoch umgestellt werden.



Mit Winkeln und Radien bemaßte Bohrungen sind rasch umgerechnet.

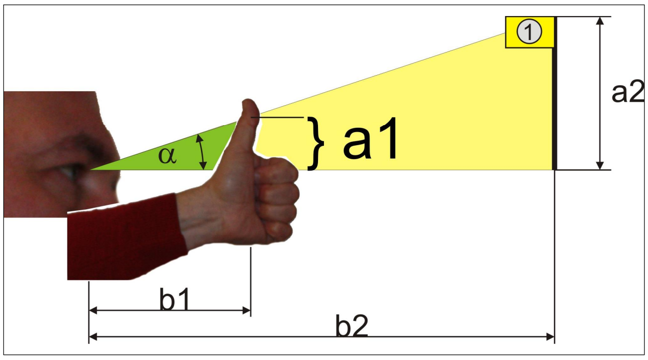
Entfernungen leichter schätzen

Mit den Winkelfunktionen lassen sich tolle Dinge anstellen. Mit ihnen ist es auch möglich, seinen Daumen zur Entfernungsbestimmung zu benutzen. Dies kann man sich etwa beim Golfspielen zunutze machen, um die Entfernung zum Loch besser abschätzen zu können.

Dazu ist es lediglich nötig, die Höhe der Fahnen zu kennen. Die Fahnenhöhe beträgt in der Regel 2,5 Meter. Der Abstand des Daumes zum Auge ist individuell verschieden und muss ermittelt werden. Nehmen wir an, er beträgt 0,7 Meter. Mit diesen Werte ist es möglich auszurechnen, wie weit die Fahne entfernt ist, wenn diese "am Daumen" 1 cm hoch erscheint. Nämlich 175 Meter.

Je näher die Fahne kommt, desto größer wird sie am Daumen erscheinen. Wenn diese am Daumen 3 cm hoch ist, dann beträgt der Abstand zur Fahne nur mehr circa 58 Meter. Die Trigonometrie kann so praktisch sein! Da bekommt sogar der Spruch "Pi mal Daumen" seine reale Entsprechung. ☺

Allerdings funktioniert die "Daumenmethode" bei Personen, die Maße schlecht schätzen können, nicht so



gut. Da gibt es zwei Lösungen: Entweder man zeichnet am Daumen mit einem Filzstift eine Zentimeterskala ein oder man benutzt gleich ein Lineal anstelle des Daumens, um die Entfernung zu bestimmen. Bleibt nur noch das Rätsel um die verwendete Lösungsformel. Nicht jedem ist sofort klar, wie diese zustande kommt.

Nun, dies ist einfach eine Formel, die aus zwei Grundformeln zusammengesetzt wird. Zunächst wird der Winkel aus dem kleinen Dreieck zwischen Auge und Daumen berechnet. Dieser Winkel bildet dann die Grundlage zur endgültigen Berechnung der Entfernung zur Fahne. Diese Entfernung entspricht der Strecke b.

Fahnenabstand berechnen		
Abst. Auge-Daumen (b1)	0,7	m
Fahnenhöhe (a2)	2,5	m
Höhe a. Daumen (a1)	3	cm
Entfernung (b2)	58,33	m
Verwendete Formel:		

$$b2 = \frac{a2}{(\tan(\arctan\frac{a1}{b1}))}$$

Somit wird also anstelle des Winkels einfach die Formel zur Berechnung ebendieses Winkels in die letzte Formel eingefügt. Mit dem Verschmelzen zweier getrennter Rechenschritte zu einem Einzigen, kann man trigonometrische Berechnungen noch effektiver durchführen.

Je näher man der Golffahne kommt, desto größer wird sie am Daumen erscheinen.Mit der Beherrschung der trigonometrischen Funktionen sind daher Golfspieler in der Lage, zuverlässig die Entfernung zum Ziel abzuschätzen, ohne sich verbotener technischer Hilfsmittel zu bedienen.

Entfernungsmessung per Laser

Wenn man etwas Spannung in die Entfernungsbestimmung mittels der

Trigonometrie bringen möchte, kann ein einfacher Laserpointer empfohlen werden. Zwei Stück von diesem neumodischen „Zeigegerät“ werden an einem selbstgebastelten Winkelmessgerät befestigt. Dadurch wird es möglich, ebenso einfach wie bei der Berechnung der Baumhöhe, die Entfernung von Häusern, Bäumen et cetera zu ermitteln. Wichtig ist, dass bei diesen Versuchen der Laserstrahl nicht versehentlich ins Auge gerät, da der Laser die Netzhaut schädigen kann. Laser 2 wird zuerst auf das zu messende Objekt gerichtet. Danach wird der Laserpunkt von Laser 1 mit dem Laserpunkt von Laser 2 in Deckung gebracht und der sich ergebende Winkel abgelesen. Um die beiden gesuchten Strecken berechnen zu können, muss schrittweise vorgegangen werden. Zunächst wird Strecke a berechnet. Erst wenn diese bekannt ist, kann Strecke c mit diesem Wert berechnet werden.

Grundformel

$$\tan\alpha = \frac{a}{b}$$

Umgestellte Formel

$$b = \frac{a}{(\tan\alpha)}$$

Verschmelzen zweier Formeln

$$\alpha = \arctan\frac{a}{b}$$

Zusammengesetzte Formel

$$b2 = \frac{a2}{(\tan(\arctan\frac{a1}{b1}))}$$

Statt zweier Formeln wird nur eine verwendet

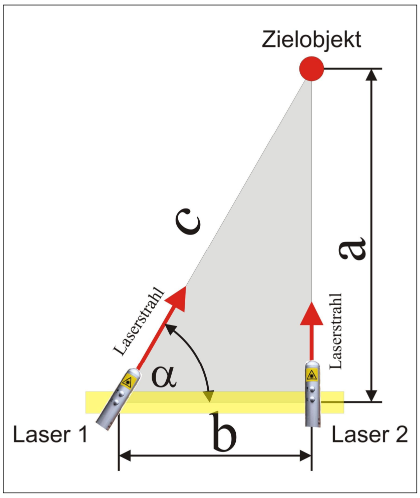
Tipp

Um Formeln korrekt umzustellen, ist es wichtig, dass nach dem Umstellen wie bei einer Waage das „Gleichgewicht“ wieder hergestellt ist. Dies bedeutet, dass beim Hinüberziehen einer Funktion diese in ihre „Gegenfunktion“ umgewandelt wird. So wird etwa aus der Wurzelfunktion die Potenzfunktion (und umgekehrt). Auch die Winkelfunktionen müssen umgewandelt werden: Aus Sin wird Arcsin, aus Cos wird Arccos und aus Tan wird Arctan. Dadurch bleibt die Formel nach dem Umstellen im „Gleichgewicht“.

Höhe von Wolken ermitteln

Die Meteorologen auf Flughäfen waren immer schon daran interessiert, die Höhe der Wolken zu ermitteln, in der diese ihren Bahnen zogen, um den Flugkapitänen exakte Auskunft für sichere Start- und Landemanöver geben zu können.

Hier führte eine ähnliche Idee wie beim Experiment mit dem Laserpointer zum Erfolg. Abgesehen davon, dass es den Laser erst viel später gab, behalfen sich die Meteorologen mit einer starken Lampe, die sie senkrecht in den Himmel richteten. Die Stelle, an der der Lichtstrahl die Wolke traf, trat deutlich hervor.



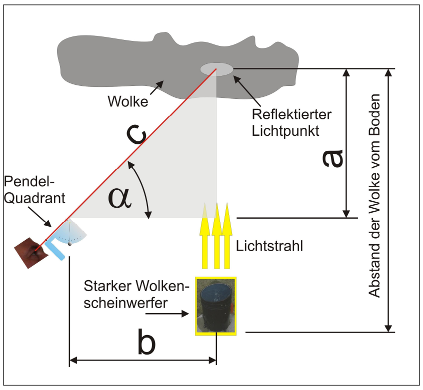
Laserkoordinaten berechnen		
Gegeben:		
Abstand (b)	0,7	Meter
Winkel	86	Grad
Gesucht:		
Wert a:	10,01	Millimeter
Wert c:	10,03	Millimeter
Formel:	Umgestellt:	
$\sin\alpha = \frac{a}{c}$	$c = \frac{a}{(\sin\alpha)}$	
$\tan\alpha = \frac{a}{b}$	$a = \tan\alpha * b$	

Nun wurde der Winkel zwischen Lampe und reflektierten Lichtstrahl ermittelt, was nach wenig Rechnerei die Wolkenhöhe ergab. Zur Winkelermittlung nutzen die Meteorologen einen sogenannten Pendelquadranten. Es kann jedoch auch unser einfacher Winkelmesser zum Einsatz kommen. Für die Berechnungen der Wolkenhöhe sind die gleichen Formeln wie für die Laseraufgabe nötig.

Der einzige Unterschied ist, dass man, wie im Fall der Baumhöhenmessung, den Abstand vom Boden zum Messgerät noch dazuzählen müsste, um ein korrektes Ergebnis zu bekommen, was aber wohl in diesem Fall nicht notwenig ist.

Erdumfang und Erddurchmesser

Nachdem durch Üben nun schon tolle Dinge mit den Winkelfunktionen berechnet werden können, soll dieses



Der Pendelquadrant war ein einfaches Hilfsmittel zur Winkelbestimmung in der Berechnung der Wolkenhöhe.

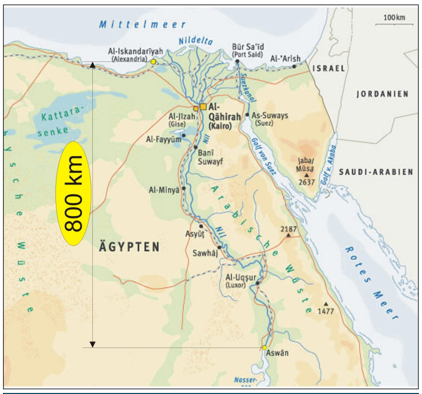
Wissen zur Berechnung des Erddurchmesser genutzt werden.

Dazu sind allerdings wichtige Vorüberlegungen nötig, um dieses Problem überhaupt lösen zu können. Schon 250 v. Christi wusste der Grieche Eratosthenes, wie man solche Probleme pragmatisch angeht. Er beobachtete, dass die Sonne an einem Brunnen in der Stadt Syene, dem heutigen Assuan in Ägypten, keinen Schatten warf. Daraus schloss er, dass die Sonne genau über ihm stand. Ein Jahr später befand er sich in der 800 Kilometer entfernten ägyptischen Hafenstadt Alexandria.

Wolkenhöhe berechnen		
Gegeben:		
Abstand (b)	50	Meter
Winkel	89	Grad
Gesucht:		
Wolkenhöhe a:	2.864,50	Meter
Wert c:	2.864,93	Meter
Formel:	Umgestellt:	
$\sin\alpha=\frac{a}{c}$	$c=\frac{a}{(\sin\alpha)}$	
$\tan\alpha=\frac{a}{b}$	$a=\tan\alpha * b$	

Am 21.6 maß er die Schattenlänge eines in Alexandria stehenden Obelisken. Aus der Höhe des Obelisken und der Schattenlänge berechnete er den Winkel. Dieser betrug 7,2 Grad. Nachdem er diesen Winkel ermittelt hatte, konnte er den Abstand von der Erdoberfläche zum Erdmittelpunkt berechnen. Eratosthenes wählte dazu den Weg über den Erdumfang.

Er wusste nun, dass 7,2 Grad einer Entfernung von 800 Kilometer auf der Erdkugel entsprachen. Ein Kreis hat bekanntlich einen Winkel von 360 Grad. Er dividierte den Winkel von 360 Grad durch 7,2 und erfuhr, dass 800 km Entfernung der 50te Teil des Erdumfangs ist. Also musste er nur die Zahl 50 mit der Entfernung 800 km malnehme und erhielt so den Erdumfang, der 40.000 km beträgt.

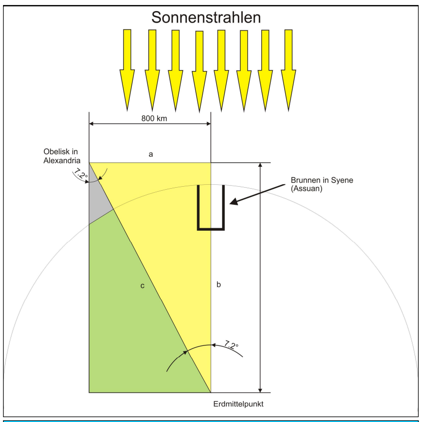


Die große Entfernung zwischen Syene und Alexandria ermöglichte es Eratosthenes, den Erddurchmesser hinreichend genau zu berechnen.

Da sich der Umfang eines Kreise mit dem Kreisdurchmesser mal 3,14 berechnen lässt, muss nur die Formel entsprechend umgestellt werden, um aus dem Kreisumfang den Kreisdurchmesser zu bekommen.

Lösung: Kreisumfang dividiert durch 3,14 = 12730 km. Wenn man den Erddurchmesser mit den Winkelfunktionen berechnet, dann fehlen im Ergebnis knapp 65 Kilometer, was daran liegt, dass Eratosthenes den Winkel lediglich mit einer Nachkommastelle messen konnte. Ein Winkel von 7,164 Grad führt nur noch zu einer kleinen Abweichung.

$$\frac{360}{7{,}2}=50$$



An einem Obelisken maß Eratosthenes einen Schattenwinkel von 7,2 Grad.

Den Monddurchmesser ermitteln

Eine Mondfinsternis ist die ideale Gelegenheit, um dessen Entfernung und Größe zu berechnen. Aristarch, der von 310 bis 230 v. Chr. lebte, ist dies aufgefallen. Allerdings ist diese Berechnung erst möglich, wenn der Durchmesser der Erde bekannt ist, da es sich bei dieser Berechnung um eine Verhältnisrechnung und keine Rechnung mit Winkelfunktionen handelt. Aber dieses Problem hat ja freundlicherweise Eratosthenes bereits gelöst. Um den Monddurchmesser zu bestimmen, werden Zeitmessungen durchgeführt. Die Zeitmessung startet, wenn der Mond in den Erdschatten eintritt. In dem Moment, wo er sich komplett im Erdschatten befindet, wird eine Zwischenzeit genommen (tab). Die Zeitmessung wird erst angehalten, wenn der Mond wieder aus dem Erdschatten austritt (tac).

Erddurchmesser berechnen		
Gegeben:		
Abstand a:	800	Kilometer
Winkel:	7,2	Grad
Gesucht:		
Erdradius (b):	6332,7	Kilometer
Erddurchmesser	12665	Kilometer
Formel:	Umgestellt:	
$\tan\alpha=\frac{a}{b}$	$b=\frac{a}{(\tan\alpha)}$	

Nehmen wir nun folgende Werte zur Berechnung an: Zeit, die zum Zurücklegen der Strecke a-b verstreicht (tab) =65 Minuten; Zeit, die zum Zurücklegen der Strecke a-c verstreicht (tac) = 236 Minuten. Aus dieser Zeitmessung kann man ermitteln, in welchem Verhältnis der Mond kleiner als die Erde ist. Da der Erddurchmesser nun ja bekannt ist, kann der Monddurchmesser berechnet werden. Genaue Messungen mit Satelliten und hochmodernen optischen Teleskopen ergaben, dass der mittlere Monddurchmesser 3476 km beträgt. Somit ist die Mondfinsternis-

Methode recht genau und für eigene Experimente bei der nächsten Mondfinsternis sehr zu empfehlen. ☺

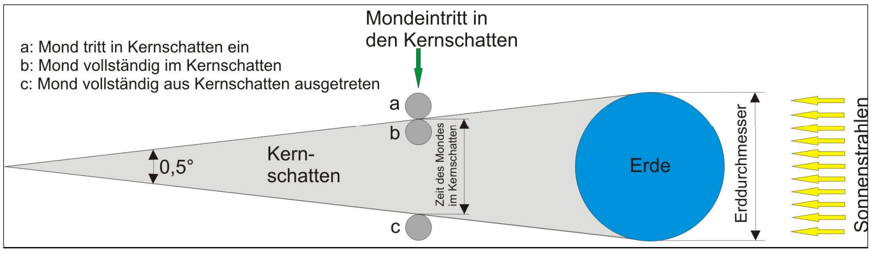
$$Verhältnis = \frac{tac}{tab} = \frac{236}{65} = 3{,}63$$

Die Mondentfernung

Da nun der Durchmesser des Mondes bekannt ist, kann auf der Grundlage der gewonnenen Daten auch dessen

$$MondØ = \frac{ErdØ}{3{,}63} = \frac{12730km}{3{,}63} = 3506km$$

Entfernung bestimmt werden. Hier sind die Winkelfunktionen wieder in ihrem Element. Die Nutzung der Winkelfunktionen war zur Bestimmung des Monddurchmessers ja nicht möglich, da zum Rechnen mit den



Der Durchmesser des Mondes wird nicht über die trigonometrischen Funktionen berechnet. Vielmehr wird dazu eine Mondfinsternis genutzt und per Zeitmessung dessen Durchmesser ermittelt.

Winkelfunktionen stets zwei bekannte Werte gegeben sein müssen und lediglich ein Wert unbekannt sein darf.

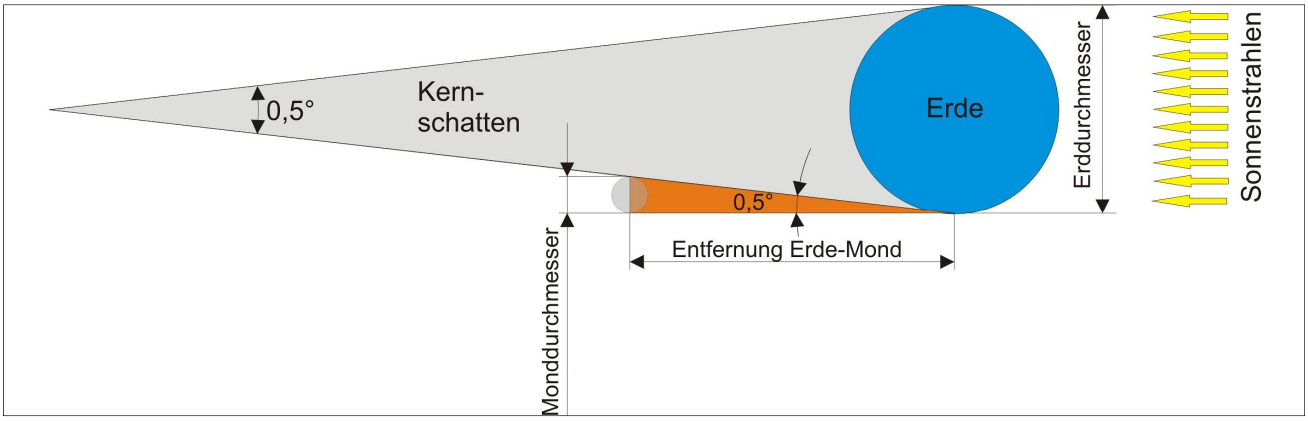
Mittels der Zeitmessung konnte dieses Problem jedoch gelöst werden, wie

Monddurchmesser		
Gegeben		
Teit tab	65	Minuten
Zeit tac	236	Minuten
Erddurchmesser	12730	Kilometer
Gesucht		
Monddurchmesser	3506,1	Kilometer

eindrucksvoll demonstriert wurde. Wir wählen zum Bestimmen der Mondentfernung die Tangensfunktion und kommen zum Ergebnis von 398.310 km für die Entfernung Erde-Mond.

Bestimmung der Sonnenentfernung

Nachdem nun der Abstand des Mondes zur Erde bekannt ist, kann man folgerichtig auch den Abstand von der Erde zur Sonne berechnen. Dazu ist es nötig, auf Halbmond zu warten, damit si-



chergestellt ist, dass sich der Mond im rechten Winkel zwischen Sonne und Erde befindet. Die Beobachtung beschränkt sich zudem auf Tage, an de-

Mondentfernung		
Gegeben		
Monddurchmesser	3476	km
Winkel	0,5	Grad
Gesucht		
Mondentfernung	398310,15	km
Formel	Umgestellt	
$\tan\alpha=\frac{a}{b}$	$b=\frac{a}{(\tan\alpha)}$	

nen sowohl der Mond, als auch die Sonne am Himmel stehen. Wenn dies der Fall ist, dann kann mit einem geeigneten Winkelmessgerät der Winkel zwischen Mond und Sonne festgelegt werden. Aristarch hatte natürlich keine so genauen Messgeräte zur Verfügung, die heute den Astronomen zur Verfügung stehen. Daher hat er den Winkel mit 87 Grad ermittelt. Tatsächlich beträgt dieser jedoch 89.85 Grad.

Dadurch bekam er lediglich eine Entfernung von rund 7,66 Millionen Kilometer. Aber immerhin war nun bekannt, dass die Sonne wesentlich weiter weg war als der Mond. Bleibt nur

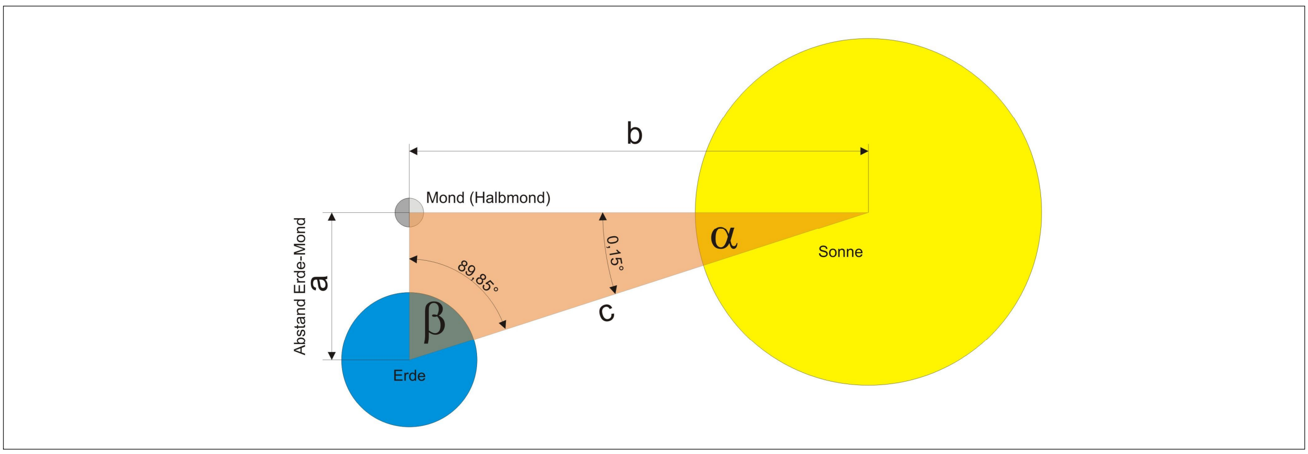
Sonnenentfernung		
Gegeben		
Mond-Erde (a)	398000	km
Winkel Beta	89,85	Grad
Winkel Alpha	0,15	Grad
Gesucht		
Sonnenentf. (c)	152.024.975,30	km
Formel	Umgestellt	
$\sin\alpha=\frac{a}{c}$	$c=\frac{a}{(\sin\alpha)}$	

noch zu erwähnen, dass die offizielle Entfernung zur Sonne 153.17 Millionen Kilometer beträgt.

Der Sonnendurchmesser

Da ja der Mond und die Sonne sich perfekt überdecken, ist klar, dass auch die Sonne einen Winkel von 0,5 Grad, gemessen von Rand zu Rand, einnimmt. Wenn nun der Sonnenabstand bekannt ist, kann leicht der Sonnendurchmesser ermittelt werden.

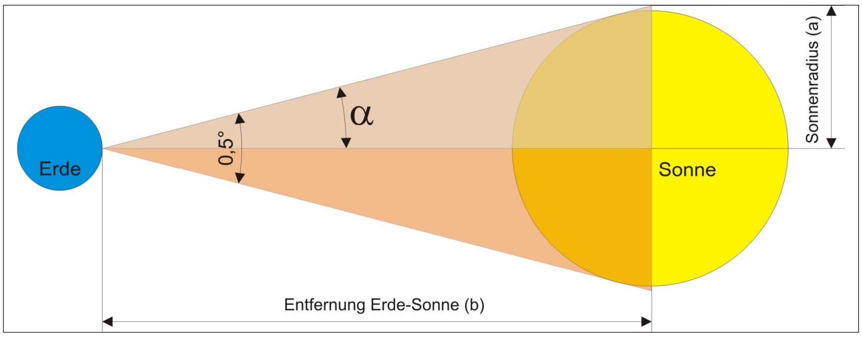
Der heute durch moderne Technik ermittelte exakte Sonnendurchmesser beträgt 1.391.400 km. An all diesen Rechenbeispielen sieht man, dass schon damals helle Köpfe in der Lage waren, relativ genau unser Planetensystem zu vermessen. Jahrtausende vor der sogenannten "modernen Zeit" waren die Menschen in der Lage, die Himmelsmechanik zu verstehen und zu berechnen. Umso unverständlicher



Hinweis: Der Leser darf sich von der Zeichnung nicht unnötig verwirren lassen, denn das Dreieck ist zum besseren Verständnis übertrieben eingezeichnet.

ist, dass es Religionen schafften, das bereits erworbene Wissen wieder verschwinden zu lassen und die These von der Scheibengestalt der Erde, die von der Sonne umkreist wird, durchsetzen konnten.

Derart einfach gestrickte Gestalten in religiösen Kreisen verstummen auch heute noch nicht und versuchen das Rad der Erkenntnis wieder zurückzudrehen. Religiös Verblendete haben jüngst gar einen Zusammenhang zwischen Erdbeben und der Kleidung von Frauen hergestellt. Und das 2300 Jahre nach Aristarch.



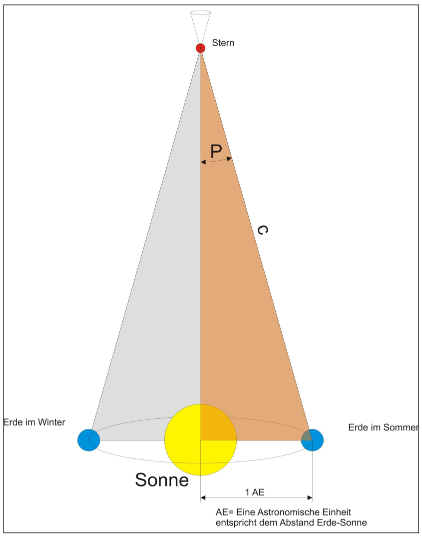
Sonnenendurchmesser		
Gegeben		
Erde-Sonne (b)	153.000.000	km
Winkel	0,5	Grad
Winkel Alpha	0,25	Grad
Gesucht		
Sonnenradius	667.592,68	km
Sonnendurchm.	1.335.185,35	km
Formel	Umgestellt	
$\tan\alpha = \frac{a}{b}$	$a = \tan\alpha * b$	

Berechnung weit entfernter Sterne

Mit dem erworbenen Wissen kann nun daran gedacht werden, Abstandsberechnung von sehr weit entfernten Sternen vorzunehmen. Dazu muss man nur den Stern anpeilen und den Winkel Sonne-Stern ermitteln.

Da die Entfernung zur Sonne ja nun bekannt ist, lässt sich so die Entfernung zu einem Stern bestimmen. Dazu ist es nötig, den Winkel des Sterns jeweils im Abstand eines halben Jahres, etwa am 21.3 und am 23.9, zu messen. Dadurch wird der Winkel genauer ermittelt. Heutzutage kann man sich den Zeitaufwand sparen, da sowohl im Internet als auch in zahlreichen astronomischen Büchern die Winkel für viele Objekte veröffentlicht sind. Die rote Riesensonne Aldebaran hat beispielsweise den Winkel von 48,94 Millibogensekunden. Um nun die Entfernung zum Stern zu berechnen, müssen zunächst diese Winkelangaben in Dezimalgrad umgewandelt werden: 48,94/3600/1000. 48,94 Millibogensekunden sind demnach 0.00001359 Grad. Die Rechnung zeigt, dass der Stern 66,6 Lichtjahre entfernt ist.

$$Dezimalgrad = Grad + \frac{Minute}{60} + \frac{Sekunde}{3600}$$



Vertiefung

Wer sich bis hierher durchgearbeitet hat, ist sicher an mehr Informationen zu den trigonometrischen Funktionen interessiert. Wie sichtbar wurde, sind die Funktionen sin, cos und tan jeweils Verhältnisse zwischen zwei Strecken. Wenn etwa 10 mm durch 30 mm geteilt werden, bekommt man als Ergebnis die Zahl 0,33333.

Für den Sinus würde diese Zahl bedeuten, dass einem Millimeter der Strecke c exakt 0,3333 Millimeter der Strecke a gegenüberstehen. Cosinus: Ein Millimeter der Strecke c stehen 0,3333 Millimeter der Strecke b gegenüber. Tangens: Ein Millimeter der Strecke b ergeben 0,3333 Millimeter auf der Strecke a.

Daher ist logischerweise diesen Verhältnissen ein fester Winkel zugeordnet. Mit den Arkusfunktionen kann aus dieser Zahl der jeweilige Winkel berechnet werden.

Sternenabstand		
Gegeben		
Erde-Sonne (a)	1	AE
Parallaxenw.	0,00001359	Grad
1 AE	149.597.870,69	km
1 Parsec	206.264,81	AE
1 Parsec	3,26	LJ
Gesucht		
Sternenabstand	4.216.024,98	AE
	20,44	Parsec
	66,63	LJ
Formel	Umgestellt	
$\sin\alpha = \frac{a}{c}$	$c = \frac{a}{(\sin\alpha)}$	

Per Arcsin erfahren wir, dass der Sinus-Winkel 19.47 Grad beträgt, über die Arccos-Funktion wird ein Cosinus-Winkel von 70.53 Grad ermittelt und per Arctan ein Tangens-Winkel von 18.43 Grad. Der Leser möge sich per Taschenrechner davon überzeugen.

Wer nun Feuer gefangen hat und sein Wissen zu den Winkelfunktionen vertiefen möchte, sei auf die zahlreiche Fachliteratur verwiesen.