Formeln umstellen ganz besonders leicht erklärt

Grundlagen des Formelumstellens verstehen und anwenden

Formeln umzustellen ist bis zu einem gewissen Grad keine große Kunst. Schwierig wird es, wenn beispielsweise Klammern aufzulösen sind. Doch auch dies kann nach einem Schema geübt werden. Mit dieser Anleitung gehen künftig viele Formelumstellaktion wie von selbst, solange die gesuchte Variable nicht mehrmals in der Formel vorkommt.

Nohren gekommen, dass es beim Formelumstellen darum geht, dass auf der linken Seite vom Gleichheitszeichen das gleiche Ergebnis herauszukommen hat, wie auf der rechten Seite. Vielfach wird in der Schule zum Verständnis dieses Sachverhalts eine Lebensmittelwaage bemüht, die nur dann im Gleichgewicht ist, wenn beide Schalen das gleiche Gewicht beherbergen.

Dieser Vergleich ist gut gewählt, da dadurch schon einmal grundsätzlich symbolisiert wird, auf was es beim Formelumstellen ankommt: auf der linken und rechten Seite der Formel muss immer das gleiche Ergebnis herauskommen, dann wurde die Formel korrekt umgestellt. Für Berechnungen im Bereich der Grundrechenarten ist es recht einfach nachzuvollziehen, wie Formeln umgestellt werden müssen. Wenn man sich das Gleichheitszeichen als "Umwandelzauberzeichen" denkt, dann wird aus einem Plus-Zeichen beim Hinüberwechseln auf die andere Seite stets ein Minus-Zeichen und aus einem Minus-Zeichen eben ein Plus-Zeichen.

Dies geschieht analog mit den anderen Grundrechenarten: aus "Mal" wird "geteilt durch" und aus "geteilt durch" eben "Mal".

Wichtig: Werden lediglich beide Seiten gegeneinander ausgetauscht, so werden die Vorzeichen nicht verändert!



1a Varianten beim Formelumstellen: Variante 1 führt über Gegenzahlen zum richtigen Ergebnis. **1b** Variante 2 ist etwas länger, dafür einfacher nachzuvollziehen. **1c** Gegenzahlen verhalten sich wie Materie und Antimaterie. Die Zahlenwerte unterscheiden sich lediglich im Vorzeichen und können jederzeit gegeneinander getauscht werden.

Das Vorzeichen im Auge behalten

Wichtig ist, dass man sich immer vor Augen hält, dass positive Vorzeichen beim Schreiben der Formel weggelassen werden können. Daher sieht man als beginnender Mathematikexperte nicht sofort, wie man am besten die Umwandlung einer Formel handhaben soll. Deshalb soll man sich zumindest am Anfang angewöhnen, die positiven Vorzeichen manuell nachzutragen:



Obiges Beispiel zeigt den manuellen Nachtrag eines Plus-Zeichens (rote Farbe). Wenn die positive fünf nach rechts wandert, wird aus Plus immer Minus. Das Plus-Zeichen vor dem "X" kann selbstverständlich weggelassen werden.

Man sollte sich angewöhnen, stets zunächst die negativen Werte für ein "Hinüberziehen" auszuwählen, um diversen Problemen beim weiteren Auflösen der Formel schon im Vorfeld aus dem Weg zu gehen, wie das nächste Beispiel mahnt.

Gegenzahlen ins Spiel gebracht

Wie Variante 1 zeigt, ist das Ergebnis ein negativer Wert, der sich darüber hinaus auf ein negatives "X" bezieht. Hier müssen nun Gegenzahlen ins Spiel kommen, um das korrekte Ergebnis mit einem positiven "X" zu erhalten. Gegenzahlen sind nichts anderes, als gespiegelte Werte. .Ähnlich einem Thermometer gibt es einen positiven und einen negativen Bereich, auf dem die jeweilige Gegenzahl eines Wertes diesem genau spiegelbildlich gegenüberliegt.

Will man vermeiden, beim Formelumstellen mit Gegenzahlen in Berührung zu kommen, sollte stets versucht werden, zunächst alle negativen Werte durch Ziehen auf die "andere Seite" in positive Werte umzuformen. Dies zeigt Variante 2. Hier steht am Ende der Formelumstellung







ein positives "X" mit dem korrekten Ergebnis.

Punkt vor Strich-Regel beachten

Aus einer Multiplikation wird beim hinüberziehen eine Division. Beim Formelumstellen gilt übrigens auch das Punkt vor Strich-Gesetz, sodass niemals versucht werden sollte, zunächst etwa die positive fünf nach rechts zu ziehen.

Analog muss im Fall einer Division vorgegangen werden. Nach dem Seitentausch wird daraus eine Multiplikation. Sollte nun das X-Zeichen rechts stehen, so können beide Seiten komplett getauscht werden, was den weiteren Rechengang erleichtert.

Wurzeln im Rechengriff

Wurzeln sind das Gegenstück zu Potenzen und umgekehrt. Logisch, dass sich beide beim Seitentausch in das jeweilige Gegenstück verwandeln. Wenn der Potenzwert größer ist als 2, dann wird bei Seitentausch eine entsprechend wertige Wurzel, um die "Formelwaage" im Gleichgewicht zu halten. Beispielsweise wird aus der 4. Potenz daher immer die 4. Wurzel. Tafel 2 zeigt, wie hier vorzugehen ist.

Klammern auflösen

Klammern haben eine Gruppenfunktion. Sie fassen Rechenfunktionen zusammen und geben diesen eine neue Gewichtung. Beispielsweise kann mit Klammern die Punkt-vor-Strich-Regel aufgehoben werden. Im obigen Beispiel werden zunächst die beiden Werte von x und c addiert und der daraus entstandene Wert mit a multipliziert. Wenn nun der Wert x unbekannt ist, die anderen Werte jedoch bekannt sind, dann muss die Formel lediglich nach x umgestellt werden.

Wie bereits bekannt, muss zunächst

Formel: $a^{*}(x+c)=b$

die Variable a auf die andere Seite. Aus einer Multiplikation wird auf der Gegenseite eine Division. Die Klam-



www.hsk.com

Umwandlungsschritt 1

$$x+c=b/a$$

mer kann nun verschwinden, da die Variablen x und c nun alleine stehen und deren Rechenvorrecht von keiner anderen Variablen gestört werden kann. Zuletzt wird nun die Variable c auf die andere Seite gebracht. Aus Plus wird ja bekanntlich Minus, wenn Umwandlungsschritt 2

$$x=b/a-c$$

eine positive Zahl oder eine Variable mit positivem Vorzeichen auf die Gegenseite kommt. Wenn nun die Vari-

ablen mit Werte versehen werden, kann geprüft werden, ob die Umstellung gelungen ist. Die Überprüfung zeigt, dass die Formel korrekt umgestellt wurde. Eine Kontrolle sollte immer vorgenommen werden, um jeden Folgefehler in umfangreichen mathematischen Aufgaben auszuschließen.

Hinweis: Ein Bruchstrich bedeutet immer, dass hier eine Division stattfindet. Daher sind Bruch und Divisionszeichen gleichwertig. Die Formel wäree also auch so korrekt:

$$X = \frac{25}{5} - 2$$

Lösen von Klammerproblemen

Klammern dürfen einfach aufgelöst werden, wenn ein Plus-Zeichen davor steht. Steht ein Minus-Zeichen vor der Klammer, müssen die Zeichen innerhalb der Klammer jeweils umgekehrt werden.

> Plus vor der Klammer: a+(b-c)=a+b-c Minus vor der Klammer: a-(b+c)=a-b-c a-(b-c)=a-b+c

Werden Klammern gesetzt, gilt die spiegelbildliche Regel des vorherigen Merksatzes.

Plus vor der zu setzenden Klammer: a+b+c=a+(b+c) a+b-c=a+(b-c) Minus vor der zu setzenden Klammer: a-b+c=a-(b-c) a-b-c=a-(b+c)

Steht vor der Klammer ein Multiplikator-Zeichen, so müssen zum Auflösen der Klammer die in der Klammer stehenden Glieder mit dem Multiplikator malgenommen werden.

 $a^{*}(b+c)=a^{*}b+a^{*}c$

Hinweis: obiger Ausdruck wird in der Regel ohne Mal-Zeichen geschrieben: ab+ac Zum besseren Verständnis wird hier jedoch darauf verzichtet, um den Lernerfolg nicht zu gefährden.

Wichtig: Um beim Auflösen der Klammer durch eine Multiplikation das korrekte Ergebnis zu erhalten, muss immer das Vorzeichen vor der Zahl oder der Variablen beachtet werden!

> +a*(b-c)=a*b-a*c Erklärung: +a*+b=+ab +a*-c=-ac Ergebnis:

+ab-ac

Positive Vorzeichen werden nicht geschrieben, daher gilt folgende Endergebnis: ab-ac. Bild 6 zeigt die Zusammenhänge, die unbedingt zu beachten sind.

Zwei Klammern können aufgelöst werden, wenn die Klammerglieder in den beiden Klammern miteinander multipliziert werden:

6 Es ist beim Umstellen von Formeln und beim Auflösen von Klammern extrem wichtig, die Vorzeichenregeln zu beachten, um zum korrekten Ergebnis zu kommen. (a+b)*(c+d)=ac+ad+bc+bd(a+b)*(c-d)=ac-ad+bc-bd(a-b)*(c+d)=ac+ad-bc-bd(a-b)*(c-d)=ac-ad-bc+bd

Entscheidend ist also immer das Vorzeichen des Ergebnisses der Multiplikation, wie sie in den Merkregeln zum Auflösen von Klammern in Bild 6 beschrieben wird.

Wenn Klammerausrücke durch einen Wert dividiert werden müssen, dann kann die Klammer aufgelöst werden, indem jedes Glied der Klammer durch diesen Wert dividiert wird.

Formel: (a+b-c):n=x Auflösung: a:n+b:n-c:n=x

Werden in der Klammer Multiplikationen vorgenommen, so wird das Ergebnis jeweils mit dem Divisor dividiert. Dies auch dann, wenn in der Klammer Divisionen vorkommen.

Formel: (a*b+c*d-e:f):n Auflösung: a*b:n+c*d:n-e:f:n=x

Werden ausdrücke in der Klammer multipliziert, so ergibt sich das gleiche Bild:

Formel: (a:b+c:d-e*f)*n=x Auflösung: a:b*n+c:d*n-e*f*n=x

Werden in Klammer gesetzte Werte potenziert, so kann diese Klammer wie folgt aufgelöst werden:

> Formel: $(a+b)^2=x$ ergibt: (a+b)*(a+b)=xAuflösung: +aa+ab+ba+bb=x





Hier werden die bereits bekannten Rechenoperationen angewandt. Auch die Merkregeln bezüglich der Vorzeichen müssen natürlich beachtet werden. Dies wird bei folgender Formel besonders deutlich:

> Formel: (a-b)2=x ergibt: (a-b)*(a-b)=x Auflösung: +aa-ab-ba+bb=x

Formelumstellen per CAS-Produkt

Seit geraumer Zeit gibt es Programme und Taschenrechner, mit denen Formeln nach beliebigen Buchstaben aufgelöst werden können. Beispielhaft sollen diese Möglichkeit mit der PC-Software "Mathcad" und der nspire-Taschenrechnerserie von Texas Instruments vorgestellt werden. Wichtig: egal, welcher Hersteller gewählt wird, stets muss der Taschenrechner oder das PC-Programm mit CAS ausgestattet sein, da sonst die Formelumstellmöglichkeit nicht gegeben ist.

Mathcad

Mathcad gibt es mittlerweile in der Version 15 und ist für Schüler und Studenten sehr preiswert beziehbar. Vor geraumer Zeit gab es die Version 8 gar als Zugabe auf diversen Computerzeitschriften-CDs. Wer damals Zugriff, hatte einen Software-Rechenboliden für wenig Geld ergattert, der auch heute noch gute Dienste tut.

Mathcad arbeitet ähnlich, wie moderne Taschenrechner. Das heißt, man kann eine Formel direkt so eingeben, wie man sie auch auf das Papier schreiben würde. Mit ein wenig Übung geht die Formeleingabe leicht von der Hand. Für die Eingabe der Flächenformel wird folgende Vorgehensweise empfohlen:

Zunächst wird per linken Mausklick der rote Cursor an eine beliebige Stelle der Eingabefläche Platziert. Danach gibt man per Tastatur den Buchstaben A ein, gefolgt von einem Mausklick auf das Zeichen "Bolescher Operator" im Menu "Auswertung". Danach das Divisions-Zeichen per Tastatur oder per Klick auf den entsprechenden Button im Menü "Arithmetisch" einge-



7 Um eine Formel von Mathcad umstellen zu lassen, muss das Zeichen "Boolescher Operator" in der Palette "Auswertung" verwendet werden.

8 Matcad präsentiert zwei Ergebnisse, die beide zum gewünschten Ergebnis führen.

ben. Dadurch wird die Möglichkeit geschaffen, die Formel nach Vorgabe einzugeben. Das griechische Zeichen Pi (π) wird über den entsprechenden Button im Menü "Griechisch" erzeugt. Ein Hochzeichen über den Buchstaben "d" erhält man, indem der Button "Quadrieren" im Menü "Arithmetisch" betätigt wird.

Die Eingabe der Zahl 4 ist mit den Cursor-Tasten ein wenig knifflig, da man sehr schnell die Formel verlässt und auf dem Eingabefeld landet. Sicherer ist es daher, den Platzhalter, an dem die Zahl 4 eingegeben werden soll, mit der Maus auszuwählen.

Wenn nun diese Formel nach einem bestimmten Buchstaben umgestellt werden soll, genügt es, den Button "auflösen" zu betätigen. Mathcad ergänzt nun die Formel mit dem Text $A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \text{ auflösen,d} \longrightarrow \begin{bmatrix} \frac{-2}{\pi} * \sqrt{(\pi * A)} \\ \\ \frac{2}{\pi} * \sqrt{(\pi * A)} \end{bmatrix}$

"auflösen", gefolgt von einem Platzhalter. Hier kann der gewünschte Buchstabe eingegeben werden, nach dem die Formel aufgelöst werden soll.

Nachdem hier der Buchstabe "d" eingegeben wurde, genügt ein Druck auf die Taste "Return", um den Umstellvorgang auszulösen. Mathcad präsentiert hier zwei Lösungen, die beide zum gewünschten Ergebnis führen. Allerdings ist festzustellen, dass die eigenhändig umgestellte Formel eleganter, da leichter nachvollziehbar, ist.

TI-Nspire cx CAS

Trotz des Aufkommens der kompakten Netbooks, auf denen neben Mathcad noch andere Software läuft, haben Taschenrechner, wie die Nspire cx CAS-Serie von Texas Instruments ihren treuen Freundeskreis. Und das zu



9 Nach dem Einschalten präsentiert der Ti-Nspire ein aufgeräumtes Menü, was überladene Tasten überflüssig macht.

Recht, ist in diesen Produkten pure Rechenkraft noch einmal ein Stück kompakter verpackt und die Betriebsdauer der Akkus entscheidend länger. Leider weicht die Handhabung dieser Rechenboliden ganz gehörig von der Bedienung herkömmlicher Taschenrechner ab.

Viele Funktionen sind nicht direkt per Tastatur erreichbar, sondern verstecken sich in diversen Menüs, was eine intensive Einarbeitung nötig macht, um den mächtigen Rechenumfang voll auszuschöpfen.

Besonderes Bedienkonzept

Nach dem Einschalten des Rechners erscheint ein Auswahlbildschirm. Dieser kann mit den Cursortasten, die im sogenannten "Touchpad" des Rechners integriert sind, durchwandert werden, wodurch verschiedene Funktionen angewählt werden können. Zur Formelumstellung wird das sogenannte "Scratchpad" benötig, das sich hinter dem Auswahlmenü "A Berechnen" verbirgt.

Nachdem "A Berechnen" angewählt wird, kann durch Drücken der mittleren Fläche des Touchpad diese Auswahl bestätigt werden, woraufhin das Scratchpad erscheint. Hier können nun alle Berechnungen wie mit herkömmlichen Taschenrechnern durchgeführt werden. Zum Umstellen von Formeln wird die Funktion "Solve" benötigt. Diese findet sich in einem Menü, das man über die gleichlautende Taste erreicht. Nachdem die Taste gedrückt wurde und das Menü sichtbar ist, wird der Cursor zur Auswahl "3 Algebra" gesetzt und mit der Cursortaste "rechts" ein weiteres Menü aufgerufen. Gleich der erste Eintrag lautet "Löse". Hinter dieser Bezeichnung verbirgt sich die Solve-Funktion. Ein Druck auf die Mitte der Touchpadfläche bewirkt, dass diese aufgerufen wird.

Die Eingabe einer Formel erfolgt nun über wenige Tasten, die wiederum teilweise Menus aufrufen, hinter denen sich weitere Funktionen befinden, die sich auf herkömmlichen Taschenrechnern in der zweiten oder dritten Ebene befinden, wenn sie überhaupt implementiert sind, denn die Nspire-Rechner von Texas Instruments besitzen eine Rechenkraft, die sich gewaschen hat.Um einen Bruch einzugeben, muss



zunächst die Formel-Taste betätigt werden. Per Cursor wird der erste Eintrag ganz links oben ausgewählt. Der Eintrag "Solve" ist nun zwischen den Klammern mit einem Bruchzeichen und zwei Platzhaltern gefüllt worden. Oben wird das Pi-Zeichen eingefügt, was über die Taste "Sonderzeichen" erfolgt. Zufällig hat diese Taste das Pi-Zeichen aufgedruckt. Nachdem diese Taste gedrückt wurde, erscheint ein Auswahlfeld, aus dem man das gewünschte Zeichen wählen kann. Pi







9 Formeln werden im TI-Nspire so eingegeben, wie sie normalerweise auf ein Blatt Papier geschrieben werden. Dadurch sind selbst umfangreiche Formeln fehlerfrei einzugeben. Auch die Ausgabe der umgestellten Formeln erfolgt so, wie es die mathematische Schreibweise vorschreibt. Die Einarbeitung in den TI-Rechner erfordert Zeit, die sich jedoch mehr als lohnt. Anzeige steht links oben und wird per Druck auf die Touchpadfläche übernommen. Die Grundrechenarten haben eigene Tasten und müssen nicht erst aus einem Menü ausgewählt werden. Das Multiplikator-Zeichen nach Pi kann daher rasch eingegeben werden.

Formeleingabe wie am PC

Zur Eingabe von d² wird natürlich wieder die Formel-Taste benötigt. Diesmal wird die zweite Funktion links oben ausgewählt. Die Eingabe des Buchstaben "d" erfolgt über die "Schreibmaschinentastatur". Danach wird der Cursor in den Platzhalter für die Zahl 2 verschoben und diese Zahl per Druck auf die Zwei aus dem Zahlenblock eingefügt.

Der Cursor wird nun nach unten in den letzten Platzhalter bewegt und aus dem Zahlenblock die 4 betätigt. Nun muss das Gleichheitszeichen "=" erzeugt werden. Dazu wird der Cursor nach rechts bewegt und diese Zeichen mit der entsprechenden Taste ohne Umweg über ein Menü eingefügt. Um zum Schluss nun den Buchstaben A als Flächenzeichen einzugeben, genügt es, auf Großschreibung per Shift-Taste umzuschalten und die Taste A zu betätigen. Die Formel wäre nun komplett eingegeben. Um den Rechner nun zu veranlassen, diese nach "d" aufzulösen, muss lediglich an die Formel der gewünschte Buchstabe hinzugefügt werden. Natürlich muss dieser Buchstabe, nach der die Formel umgestellt werden soll, durch ein Komma von der Formel getrennt werden, damit dies klappt. Das Komma hat eine eigene Taste und der Buchstabe wird wie gehabt über die "Schreimaschinentastatur" eingegeben.

Nachdem die Taste "enter" gedrückt wurde, wird die Formel umgestellt. In diesem Fall sind zwei Lösungen möglich, die beide zum korrekten Ergebnis führen. Wie zu sehen ist, gibt der Rechner eine andere Lösung aus, wie Mathcad. Und die "zu Fuß" umgestellte Formel sieht wieder völlig anders aus. Hier bekommt der Spruch, dass viele Wege nach Rom führen, eine weitere Bestätigung.

www.weltderfertigung.de



Das Fachmagazin im Internet

CNC, CAD, CAM, ERP Branchenmeldungen KSS und Tribologie Blechbearbeitung Drehmaschinen Fräsmaschinen Spannsysteme Schleiftechnik Schneidstoffe Messtechnik Werkzeuge



Reinigung und Entsorgung Generative Technologie Forschungsnachrichten Wasserstrahltechnik Sicherheitstechnik Handwerkzeuge Funkenerosion Lasertechnik Sägetechnik Automation Logistik